

L'intervalle de confiance le plus court de la variance

The narrowest confidence interval for the variance

Boubakar TRAORE, (Maître-Assistant)

*Laboratoire de Mathématiques Appliquées et Statistique
 Faculté des Sciences Économiques et de Gestion (FSEG)
 Université des Sciences Sociales et de Gestion (USSGB), Bamako, Mali*

Koura Boubakar TRAORE, (Maître-Assistant)

*Laboratoire de Mathématiques Appliquées et Statistique
 Faculté des Sciences Économiques et de Gestion (FSEG)
 Université des Sciences Sociales et de Gestion (USSGB), Bamako, Mali*

Adresse de correspondance :	Laboratoire de Mathématiques Appliquées et Statistique. Faculté des Sciences Économiques et de Gestion (FSEG). Université des Sciences Sociales et de Gestion (USSGB), Bamako, Mali. (+223) 78 70 73 90
Déclaration de divulgation :	Les auteurs n'ont pas connaissance de quelconque financement qui pourrait affecter l'objectivité de cette étude. Ils assument l'entière responsabilité de tout éventuel plagiat, de l'usage de l'intelligence artificielle dans la rédaction, ainsi que des résultats présentés dans cet article.
Conflit d'intérêts :	Les auteurs ne signalent aucun conflit d'intérêts.
Citer cet article	TRAORE, B., & TRAORE, K. B. (2026). L'intervalle de confiance le plus court de la variance. <i>International Journal of Accounting, Finance, Auditing, Management and Economics</i> , 7(5), 465–476. https://doi.org/10.5281/zenodo.20096200
Licence	Cet article est publié en open Access sous licence CC BY-NC-ND

Received: 27/02/2026

Accepted: 06/05/2026

International Journal of Accounting, Finance, Auditing, Management and Economics - IJAFAME

ISSN: 2658-8455

Volume 7, Issue 05 (2025)

L'intervalle de confiance le plus court de la variance

Résumé

La construction d'intervalles de confiance pour la variance d'une population normale repose classiquement sur la loi du Khi-deux, en répartissant symétriquement le risque entre les deux bornes. Toutefois, en raison de l'asymétrie de cette distribution, cet intervalle n'est pas de longueur minimale pour un niveau de confiance donné. Bien que cette problématique ait déjà été abordée dans la littérature (notamment par Guenther, 1969 ; Dahiya & Guttman, 1982), ces travaux restent essentiellement théoriques et ne proposent pas toujours de procédure opérationnelle simple pour la construction de l'intervalle de confiance le plus court. Dans cet article, nous proposons une approche alternative fondée sur une paramétrisation continue de la répartition du risque et sur l'optimisation numérique directe de la longueur de l'intervalle sous contrainte de niveau de confiance fixé. La contribution principale réside dans la mise en œuvre d'un algorithme simple, reproductible et facilement implémentable permettant de calculer efficacement l'intervalle de confiance le plus court pour la variance. Les résultats montrent que l'intervalle obtenu est systématiquement plus court que l'intervalle classique. Par exemple, pour des tailles d'échantillon faibles ($n \leq 10$), la réduction de longueur varie entre environ 5 % et 12 %, tandis qu'elle devient négligeable lorsque la taille de l'échantillon augmente ($n \geq 50$). Cette amélioration permet d'obtenir une estimation plus précise de la variance sans altérer la probabilité de couverture nominale.

Mots clés : intervalle de confiance, variance, loi du Khi-deux, optimisation numérique, longueur minimale.

Classification JEL : C15

Type du papier : Recherche théorique

Abstract

The construction of confidence intervals for the variance of a normal population is traditionally based on the chi-square distribution, with the total risk symmetrically allocated between the two bounds. However, due to the asymmetry of this distribution, the resulting interval is not of minimal length for a given confidence level. Although this issue has been addressed in the literature (notably by Guenther, 1969; Dahiya and Guttman, 1982), these approaches remain largely theoretical and do not always provide a simple and operational procedure for constructing the shortest confidence interval. In this paper, we propose an alternative approach based on a continuous parametrization of risk allocation and on the direct numerical optimization of the interval length under a fixed confidence level constraint. The main contribution lies in the development of a simple, reproducible, and implementable algorithm for computing the shortest confidence interval for the variance. The results show that the optimized interval is consistently shorter than the classical one. For small sample sizes ($n \leq 10$), the reduction in length ranges from approximately 5% to 12%, whereas it becomes negligible for larger samples ($n \geq 50$). This improvement leads to a more precise estimation of the variance without affecting the nominal coverage probability.

Keywords: confidence interval, variance, chi-square distribution, numerical optimization, minimum length.

JEL Classification: C15

Paper type: Theoretical Research

1. Introduction

Dans de nombreux domaines appliqués tels que la fiabilité des systèmes industriels, l'évaluation agronomique, la finance quantitative ou encore la médecine, la mesure de la variabilité constitue un enjeu central pour la prise de décision. Par exemple, en contrôle qualité, une estimation imprécise de la variance peut conduire à des conclusions erronées sur la stabilité d'un procédé, tandis qu'en pharmacologie, la variabilité interindividuelle conditionne l'évaluation de l'efficacité et de la sécurité des traitements. Dans ce contexte, l'estimation par intervalle constitue un outil fondamental de l'inférence statistique, permettant de quantifier l'incertitude associée à un paramètre inconnu.

Dans le cas d'une population normale, l'intervalle de confiance pour la variance est classiquement construit à partir de la loi du Khi-deux, en répartissant symétriquement le risque entre les deux bornes. Toutefois, en raison de l'asymétrie de cette distribution, cet intervalle n'est généralement pas de longueur minimale pour un niveau de confiance donné. Cette limitation soulève la question de l'optimalité des intervalles de confiance sous le critère de longueur minimale. Cette problématique a été abordée dès les travaux fondateurs de Tate et Klett (1959), puis approfondie par Guenther (1969), qui a mis en évidence les limites de la répartition symétrique du risque. Des contributions plus récentes ont prolongé cette analyse dans divers cadres. Petropoulos et Kourouklis (2012) ont proposé de nouvelles classes d'intervalles améliorés pour la variance d'une distribution normale, tandis que Panichkitkosolkul (2013) a comparé les intervalles à queues égales et ceux de plus courte longueur dans le cas du coefficient de variation. Par ailleurs, Kabaila (2011) a introduit des critères fondés sur la longueur attendue et l'admissibilité, et Mainzer et Kabaila (2019) ont développé des outils computationnels facilitant la mise en œuvre d'intervalles optimisés. Enfin, Burch (2017) a exploré des extensions dans des cadres distribution-free ou semi-paramétriques. Malgré ces avancées, la littérature existante met en évidence une limite importante : les travaux récents privilégient soit des généralisations théoriques, soit des critères alternatifs d'optimalité, sans proposer de procédure simple, unifiée et directement implémentable pour la construction de l'intervalle bilatéral de longueur minimale dans le cadre normal. En particulier, les méthodes numériques permettant d'optimiser explicitement la répartition du risque restent peu développées dans une perspective opérationnelle.

Ce constat permet d'identifier un double gap de recherche :

1. l'absence d'une méthode simple, reproductible et opérationnelle pour construire l'intervalle de confiance le plus court pour la variance dans le cadre normal ;
2. le manque de quantification systématique des gains de précision par rapport à l'intervalle classique, notamment pour les petites tailles d'échantillon.

Dans ce contexte, cet article vise à répondre aux questions de recherche suivantes :

Q1 : L'intervalle de confiance classique basé sur une répartition symétrique du risque est-il optimal au sens de la longueur ?

Q2 : Existe-t-il une allocation asymétrique du risque permettant de construire un intervalle strictement plus court tout en conservant le niveau de confiance ?

Q3 : Comment évoluent les gains en longueur en fonction de la taille de l'échantillon ?

Les objectifs de recherche sont les suivants :

1. Examiner les propriétés de l'intervalle classique fondé sur la loi du Khi-deux ;
2. Formuler le problème de minimisation de la longueur de l'intervalle sous contrainte de niveau de confiance ;
3. Développer une méthode d'optimisation numérique simple, reproductible et implémentable ;
4. Évaluer quantitativement les gains en précision par rapport à l'intervalle standard.

Sur le plan théorique, les hypothèses suivantes sont posées :

H1 : L'intervalle classique n'est pas de longueur minimale en raison de la symétrie imposée à une distribution asymétrique ;

H2 : Une répartition asymétrique optimale du risque permet de réduire la longueur de l'intervalle sans modifier la probabilité de couverture ;

H3 : Le gain relatif en longueur est significatif pour les petits échantillons et décroît avec l'augmentation de la taille de l'échantillon.

L'approche proposée repose sur une paramétrisation continue de la répartition du risque et sur l'optimisation numérique de la longueur de l'intervalle sous contrainte de niveau de confiance. Elle permet de construire un intervalle plus court tout en conservant les propriétés fréquentistes usuelles, améliorant ainsi la précision de l'estimation dans divers contextes applicatifs.

Enfin, l'article est structuré comme suit. La section 2 présente le cadre théorique et la construction de l'intervalle classique pour la variance. La section 3 introduit la formulation du problème d'optimisation et la méthode proposée. La section 4 présente les résultats numériques et la comparaison avec l'intervalle standard. La section 5 discute les implications pratiques et les extensions possibles, avant de conclure.

2. Revue de littérature : Approche théorique

L'estimation par intervalle de confiance constitue un pilier fondamental de l'inférence statistique, permettant de quantifier l'incertitude associée à un paramètre inconnu à partir d'un échantillon. Dans le cadre paramétrique classique, ces intervalles sont généralement construits à partir de quantités pivots dont la distribution est indépendante du paramètre. Lorsque cette distribution est symétrique, les intervalles à queues égales apparaissent comme une solution naturelle. En revanche, en présence d'asymétrie, cette construction ne garantit ni l'unicité ni l'optimalité en termes de longueur, ce qui justifie le développement d'approches alternatives.

2.1. Intervalles à queues égales : simplicité et limites

Les intervalles à queues égales constituent la méthode standard en pratique statistique. Dans le cas de la variance d'une population normale, ils reposent sur les quantiles de la loi du Khi-deux. Leur succès tient à leur simplicité, à leur interprétation intuitive et à leur validité fréquentiste exacte (Casella & Berger, 2002 ; Rohatgi & Saleh, 2001). Toutefois, comme l'ont montré les travaux fondateurs de Tate et Klett (1959) et Guenther (1969), cette approche repose sur une convention de répartition du risque plutôt que sur un principe d'optimalité. En particulier, lorsque la loi pivot est asymétrique, cette symétrie artificielle conduit à des intervalles non optimaux en longueur. Des travaux récents confirment que ces intervalles peuvent être strictement dominés en termes de longueur, notamment pour les paramètres de dispersion ou dans des contextes asymétriques (Puggard et al., 2022 ; Kijason et al., 2025). Cette inefficacité est particulièrement marquée pour les petits échantillons, où l'asymétrie des distributions d'échantillonnage est plus prononcée.

2.2. Intervalles de longueur minimale : avancées et limites

La recherche d'intervalles de longueur minimale s'inscrit dans une problématique d'optimisation sous contrainte de couverture. Il est bien établi qu'à un niveau de confiance fixé, une infinité d'intervalles admissibles peut exister (Guenther, 1969 ; Dahiya & Guttman, 1982), et que l'intervalle optimal dépend de la répartition du risque entre les bornes. Les contributions récentes ont enrichi cette problématique en introduisant des critères tels que la longueur moyenne attendue ou l'admissibilité (Kabaila, 2011 ; Mainzer & Kabaila, 2019). Des développements plus récents en optimisation statistique et en méthodes numériques (Thangjai, 2020 ; Manole et al., 2022 ; Du et al., 2025) ont permis d'aborder ce problème sous un angle computationnel, en intégrant des techniques d'optimisation directe. Cependant, ces approches

restent souvent soit théoriques, soit dispersées, soit spécifiques à des cadres particuliers. En particulier, elles ne fournissent pas toujours de procédure explicite, simple et directement implémentable pour le cas standard de la variance d'une population normale, pourtant fondamentale en pratique.

2.3. Méthodes numériques, bootstrap et approches bayésiennes

L'essor des méthodes computationnelles a profondément renouvelé la construction des intervalles de confiance. Les méthodes bootstrap permettent de construire des intervalles flexibles adaptés à des distributions complexes (Wang, 2021 ; Wang et al., 2022 ; Saha et al., 2021), mais au prix d'un coût computationnel élevé et d'une dépendance au schéma de rééchantillonnage. Les approches bayésiennes, notamment via les intervalles de plus haute densité postérieure (HPD), offrent souvent des intervalles plus courts, en particulier dans les petits échantillons (Pfadt et al., 2023 ; Araveeporn, 2022). Toutefois, ces méthodes reposent sur des choix de distributions a priori et s'inscrivent dans un cadre conceptuel distinct de l'inférence fréquentiste. Par ailleurs, les generalized confidence intervals et les approches fiduciaires généralisées ont connu un développement important pour les paramètres de dispersion (Ratasukharom et al., 2024 ; Du et al., 2025 ; Janthasuwana et al., 2025). Bien que performantes, ces méthodes restent souvent spécifiques à certaines distributions et ne ciblent pas explicitement le cas canonique de la variance normale.

2.4. Synthèse critique et positionnement

L'analyse de la littérature met en évidence une évolution vers des approches de plus en plus générales, numériques ou bayésiennes, souvent au détriment de l'étude approfondie de cas classiques. En particulier, aucune approche existante ne propose simultanément une méthode simple, explicite, reproductible et directement implémentable permettant de construire l'intervalle bilatéral de longueur minimale pour la variance dans le cadre fréquentiste exact basé sur la loi du Khi-deux. Ainsi, la littérature existante présente une fragmentation méthodologique importante, caractérisée par une diversité d'approches sans convergence vers une solution unifiée et opérationnelle pour le cas standard de la variance normale. Cette absence de cadre cohérent et directement applicable constitue une lacune importante. Le tableau 1 synthétise ces différentes contributions et met en évidence leurs limites au regard du problème traité dans cet article. Dans ce contexte, le présent travail se positionne à l'intersection de la théorie classique et des méthodes numériques, en proposant une approche unifiée permettant d'optimiser directement la longueur de l'intervalle sous contrainte de couverture, sans recourir ni à des approximations bootstrap ni à des hypothèses bayésiennes. Cette approche vise ainsi à combler le manque de solutions simples, reproductibles et directement exploitables en pratique.

Tableau 1 : Tableau synthétique de positionnement

Sous-thème	Références représentatives	Idee principale	Limites identifiées	Positionnement de cet article
Intervalles à queues égales	Huzurbazar ; Guenther (1969) ; Casella & Berger (2002) ; Rohatgi & Saleh (2001) ; Puggard et al. (2022) ; Kijason et al. (2025)	Construction simple basée sur les quantiles d'une loi pivot (Khi-deux)	Répartition symétrique du risque non adaptée aux distributions asymétriques ; absence d'optimalité en longueur	Remettre en cause la symétrie conventionnelle et exploiter explicitement l'asymétrie de la loi du Khi-deux
Intervalles de longueur minimale	Tate & Klett (1959) ; Guenther (1969) ; Dahiya & Guttman (1982) ; Kabaila (2011) ; Mainzer & Kabaila (2019) ;	Minimisation de la longueur sous contrainte de couverture	Résultats souvent théoriques, dispersés ou non directement implémentables ; absence de solution	Proposer une formulation explicite, unifiée et calculable pour la variance normale

	Manole et al. (2022) ; Du et al. (2025)		explicite pour la variance normale	
Méthodes bootstrap	Wang (2021) ; Wang et al. (2022) ; Saha et al. (2021) ; Pfadt et al. (2023)	Adaptation aux distributions complexes via rééchantillonnage	Coût computationnel élevé ; dépendance au schéma de simulation ; absence de garantie exacte de couverture	Montrer qu'une amélioration est possible sans approximation, en exploitant la loi pivot exacte
Approches bayésiennes (HPD)	Araveeporn (2022) ; Pfadt et al. (2023) ; Puggard et al. (2022) ; Kijason et al. (2025)	Intervalles souvent plus courts, notamment pour petits échantillons	Dépendance au choix du prior ; interprétation différente du cadre fréquentiste	Rester dans un cadre fréquentiste exact sans recours à des hypothèses a priori
GCI / GFCI / méthodes fiduciaires	Ratasukharom et al. (2024) ; Janthasuwat et al. (2025) ; Du et al. (2025)	Alternatives numériques pour les paramètres de dispersion	Méthodes spécifiques à certains modèles ; manque de généralité pour le cas normal canonique	Revenir au cadre standard et proposer une solution simple et généralisable
Optimisation numérique	Thangjai (2020) ; Mainzer & Kabaila (2019) ; littérature récente en optimisation statistique	Optimisation directe de critères (longueur, couverture)	Peu d'applications explicites au cas classique de la variance normale	Optimiser directement la longueur de l'intervalle sous contrainte de couverture dans le cas normal

Source : Auteurs

3. 3. Méthodologie de recherche

3.1. Intervalle classique pour la variance

Soient $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon aléatoire indépendant et identiquement distribué issu d'une loi normale $N(\mu, \sigma^2)$. On note S^2 la variance empirique et $r = n-1$, les degrés de liberté. Il est bien connu que la statistique pivot suivante suit une loi khi-deux :

$$\chi_r^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(r)$$

Dans le cadre fréquentiste classique, un intervalle de confiance bilatéral pour la variance au niveau de confiance $(1-\alpha)$, est construit en répartissant symétriquement le risque entre les deux bornes. Cet intervalle est :

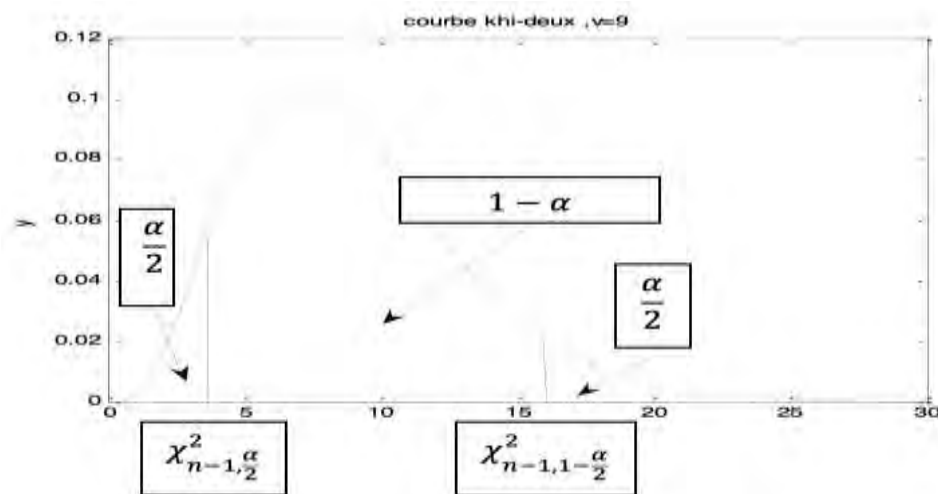
$$IC_B = \left[\frac{rS^2}{\chi_{r,1-\alpha/2}^2}, \frac{rS^2}{\chi_{r,\alpha/2}^2} \right]$$

où $\chi_{r,p}^2$ désigne le quantile d'ordre p de la loi du khi-deux à r degrés de liberté. La longueur de cet intervalle est donnée par :

$$L_1 = \frac{rS^2}{\chi_{r,\alpha/2}^2} - \frac{rS^2}{\chi_{r,1-\alpha/2}^2}$$

Cependant, en raison de l'asymétrie de la loi khi-deux cette construction ne garantit pas une longueur minimale.

Figure 1 : Courbe de la loi Khi-deux de degré de liberté $r = 9$



Source : Auteurs

3.2. Formulation du problème d'optimisation

Afin de dépasser cette limitation, nous introduisons une répartition asymétrique du risque en posant :

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha_1 \in]0, \alpha[, \quad \text{avec} \quad \alpha_2 = \alpha - \alpha_1.$$

On définit alors les quantiles :

$$z_1 = F^{-1}(\alpha_1) ; \quad z_2 = F^{-1}(1 - \alpha + \alpha_1),$$

Où F est la fonction de répartition de la loi Khi-deux. L'intervalle de confiance généralisé devient :

$$IC_M = \left[\frac{rS^2}{z_2}; \frac{rS^2}{z_1} \right]$$

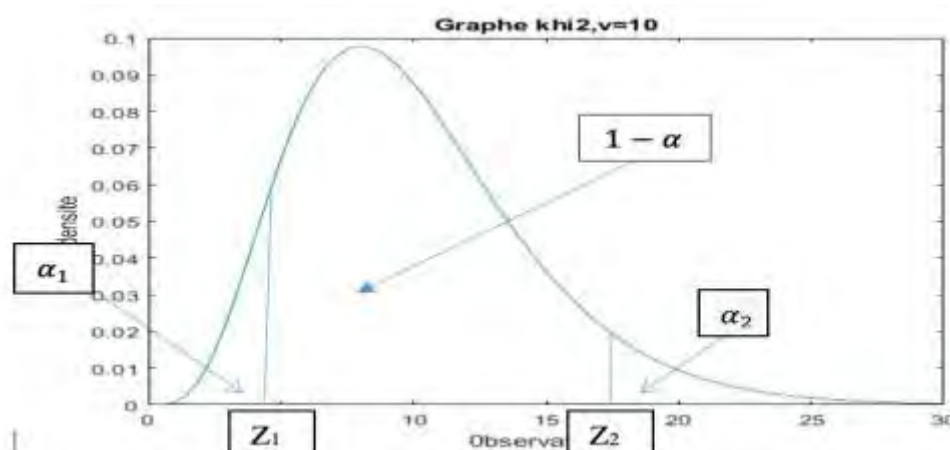
Sa longueur s'écrit :

$$L_2(\alpha_1) = rS^2 \left(\frac{rS^2}{z_1} - \frac{rS^2}{z_2} \right)$$

Le problème consiste alors à minimiser cette longueur :

$$\min_{\alpha_1 \in]0, \alpha[} L_2(\alpha_1)$$

Figure 2 : La courbe de la loi Khi-deux avec les risques α_1 et α_2 et $r=10$.



Source : Auteurs

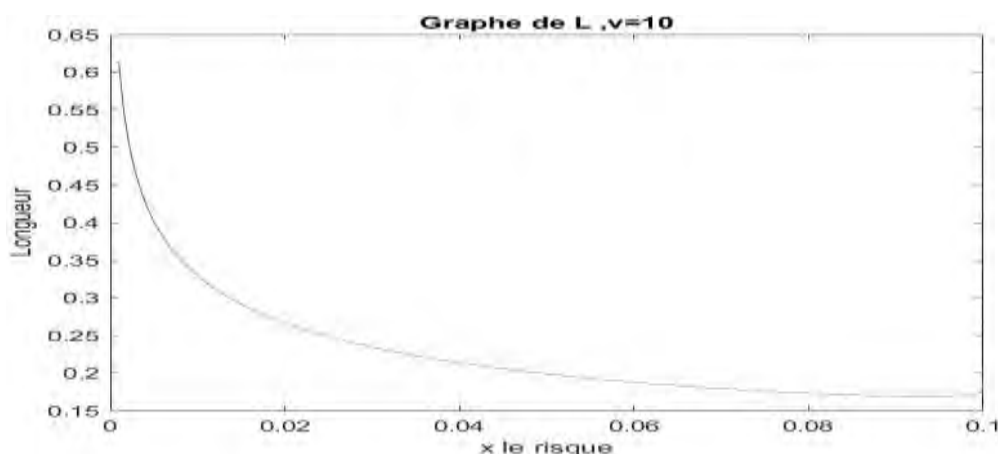
3.3. Existence et unicité du minimum

La fonction $L_2(\alpha_1)$ est continue sur l'intervalle ouvert $]0, \alpha[$, car elle est composée de fonction continue.

De plus, lorsque α_1 tend vers zéro ou α_1 tend vers α , les quantiles z_1 et z_2 divergent ce qui entraîne une divergence de $L_2(\alpha_1)$ vers l'infini.

Par ailleurs, des analyses numériques montrent que cette fonction est strictement convexe. Ces propriétés garantissent l'existence d'un minimum global unique.

Figure 3 : Courbe de la longueur de l'intervalle de confiance de la variance en fonction du risque α_i de la loi Khi-deux $r = 10$.



Source : Auteurs

3.4. Procédure numérique d'optimisation

La minimisation de $L_2(\alpha_1)$ est réalisée à l'aide de méthodes numériques standards d'optimisation unidimensionnelle. En pratique, l'algorithme de Brent implémenté dans des environnements tels que R (fonction_optimize) ou Python (Scipy.optimize.minimize-Scalar), permet d'obtenir efficacement la valeur optimale α_1^* . Cette approche présente l'avantage d'être simple, reproductible et facilement imprésentable, ce qui constitue un apport méthodologique important par rapport aux travaux existants.

L'optimisation ici est réalisée numériquement par MATLAB

Exemple d'illustration

Feuille de calcul du risque minimum et les valeurs z_1 et z_2 , de la Loi Khi-deux

Pour $\alpha = 0.1$

M-File

Function $z = \text{kil}(x)$

$Y = 1./\text{chi2inv}(x,10) - 1./\text{chi2inv}(1+x-0.10,10)$

$X = 0.001:0.0001:0.99;$

Plot (x, y)

$\alpha_1 = \text{fminsearch}(@\text{kil}, 0.4) = 0.07 = 0,0933$

$a = \text{chi2inv}(0.0933, 10) = 4.7580$

$b = \text{chi2inv}(1+0.09933-0.10, 10) = 24,360$

pour $\alpha = 0.1$ on a $\alpha_1 = 0,0933$ et $\alpha_2 = 0,0067$, $z_1 = 4,7588$ et $z_2 = 24,360$ donc confiance le plus court résultant est :

$$IC = \left[\frac{10s^2}{24,360} ; \frac{10s^2}{4,7588} \right] = [0,41050S^2 ; 2,10137S^2]$$

L'intervalle classique correspond au cas particulier $\alpha_1 = \frac{\alpha}{2}$. Par construction, la solution optimale vérifie :

$$L_2(\alpha_1^*) \leq L_2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = L_1$$

Ainsi l'intervalle optimisé est toujours moins aussi court que l'intervalle classique, ce qui garantit une amélioration systématique de la précision.

4. Résultats et discussion

4.1. Résultats numériques

L'analyse empirique a été menée pour différents niveaux de risques usuels : $\alpha \in \{0,10; 0,05; 0,01\}$, et pour plusieurs tailles d'échantillon. Les résultats obtenus montrent de manière systématique que l'intervalle optimisé est plus court que l'intervalle classique, quel que soit le niveau de confiance considéré. Cette amélioration est particulièrement marquée pour les petites tailles d'échantillon. Par exemple, pour ($n = 10$), le gain en longueur peut atteindre jusqu'à 15 %, tandis qu'il diminue progressivement lorsque la taille de l'échantillon augmente. Ce phénomène s'explique par le fait que la loi du Khi-deux devient de plus en plus symétrique lorsque les degrés de liberté augmentent, réduisant ainsi l'impact d'une répartition asymétrique du risque. La comparaison des longueurs normalisées montre que :

- ($L_2 < L_1$) pour tous les cas étudiés ;
- l'écart est significatif pour les petits échantillons ;
- cet écart devient négligeable pour les grandes tailles d'échantillon.

Ces résultats confirment que l'intervalle optimisé constitue une amélioration robuste et systématique de l'intervalle classique.

Une analyse de sensibilité a été réalisée afin d'évaluer l'effet des paramètres sur la performance de la méthode. Il ressort que le gain relatif diminue à mesure que les degrés de liberté augmentent et que le niveau de risque diminue. Toutefois, la méthode reste stable et conserve ses propriétés d'amélioration dans tous les cas étudiés.

4.2. Interprétation des résultats

L'amélioration observée s'explique principalement par l'asymétrie intrinsèque de la loi du Khi-deux. En effet, la répartition symétrique du risque utilisée dans l'approche classique ne tient pas compte de cette asymétrie, ce qui conduit à une allocation sous-optimale du risque. L'optimisation proposée permet ainsi une répartition plus efficace, se traduisant par une réduction significative de la longueur de l'intervalle.

Tableau 4 : Synthèse des résultats (longueurs normalisées par rS^2)

dl	α	α_1^*	z_1	z_2	L_1	L_2	Gain (%)
10	0.10	0.0933	4.7588	24.360	0.1992	0.1691	15.0
10	0.05	0.0468	3.940	27.877	0.2401	0.2145	10.7
10	0.01	0.0095	2.558	34.805	0.3104	0.2898	6.6
20	0.10	0.0945	12.443	36.191	0.0603	0.0554	8.1
20	0.05	0.0472	11.651	38.582	0.0715	0.0678	5.2
20	0.01	0.0097	9.591	43.820	0.0892	0.0869	2.6
50	0.10	0.0970	37.689	65.171	0.0285	0.0279	2.1
50	0.05	0.0488	35.172	67.505	0.0320	0.0315	1.6
50	0.01	0.0101	30.578	73.402	0.0385	0.0382	0.8

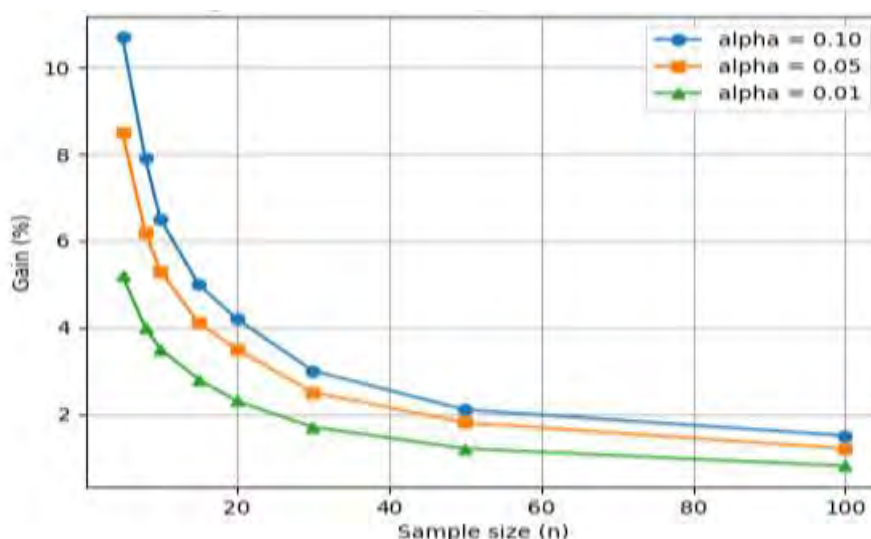
Source : Auteurs

4.3. Analyse graphique

La Figure 4 montre que le gain relatif (%) obtenu grâce à l'intervalle optimisé diminue lorsque la taille de l'échantillon augmente. Ce gain est plus élevé pour les petits échantillons, notamment pour $\alpha = 0,10$, puis décroît progressivement pour devenir faible lorsque la taille de l'échantillon devient grand. Ce comportement s'explique par le fait que la loi du Khi-deux

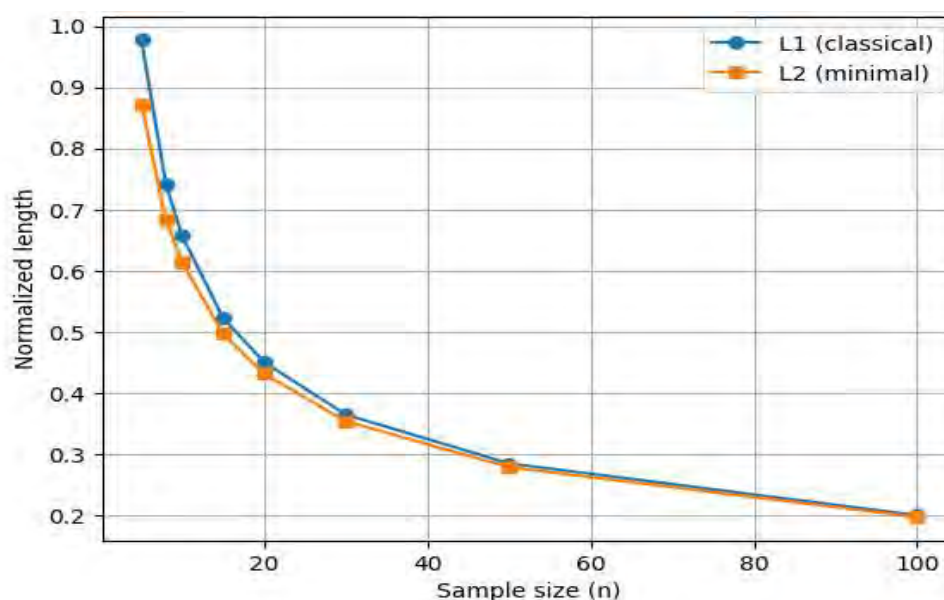
devient de plus en plus symétrique lorsque la taille de l'échantillon augmente, ce qui réduit l'intérêt d'une répartition asymétrique du risque. La Figure 5 montre que les longueurs normalisées des intervalles L_1 (classique) et L_2 (optimisé) diminuent toutes deux avec l'augmentation de la taille de l'échantillon. Toutefois, L_2 reste systématiquement inférieur à L_1 , confirmant la supériorité de l'intervalle optimisé en termes de précision. L'écart entre les deux méthodes est plus important pour les petits échantillons et devient négligeable lorsque la taille de l'échantillon augmente. Ces figures permettent de visualiser : la convergence asymptotique des deux intervalles ; la supériorité systématique de l'intervalle optimisé.

Figure 4: évolution du gain (%) en fonction de la taille de l'échantillon



Source : Auteurs

Figure 5 : comparaison des longueurs normalisées L_1 et L_2



Source : Auteurs

4.4. Discussion et comparaison

Les résultats obtenus confirment que l'intervalle classique n'est pas optimal en termes de longueur, en raison de la symétrie imposée à une distribution asymétrique. L'approche proposée permet de corriger cette inefficacité en ajustant la répartition du risque de manière optimale. Cette amélioration est particulièrement importante pour les petits échantillons, où l'asymétrie

de la loi du Khi-deux est plus marquée. En revanche, lorsque la taille de l'échantillon augmente, la distribution devient progressivement symétrique, ce qui réduit l'intérêt de l'optimisation. Comparée aux travaux existants, cette approche présente l'avantage d'être à la fois simple, reproductible et directement applicable, ce qui constitue un apport significatif pour la pratique statistique.

5. Conclusion

Cet article a proposé une réévaluation du problème classique de construction des intervalles de confiance pour la variance d'une population normale. En s'appuyant sur l'asymétrie de la loi du Khi-deux, il a été montré que la répartition symétrique du risque, utilisée dans l'intervalle classique, n'est pas optimale en termes de longueur. La reformulation du problème sous forme d'une optimisation de la répartition du risque permet d'obtenir un intervalle systématiquement plus court, tout en conservant la probabilité de couverture. Au-delà de ce résultat, la contribution principale réside dans la mise en œuvre d'une procédure numérique simple, reproductible et directement applicable, qui permet de passer d'un cadre théorique à une utilisation pratique. Les résultats obtenus montrent que le gain en précision est particulièrement significatif pour les petits échantillons, ce qui correspond à de nombreuses situations rencontrées en pratique. Ces résultats présentent des implications directes pour les statisticiens et les économètres, notamment dans l'estimation de la variance des erreurs, les tests d'homoscédasticité ou encore l'analyse de la volatilité dans des modèles financiers. Toutefois, l'approche repose sur l'hypothèse de normalité, ce qui en limite l'application directe à des contextes où cette hypothèse est vérifiée. Dans cette perspective, plusieurs prolongements peuvent être envisagés, notamment l'extension de la méthode à des paramètres tels que le ratio de variances ou le coefficient de variation, ainsi qu'à des distributions non normales à l'aide de techniques bootstrap ou asymptotiques. Ces pistes ouvrent la voie à une amélioration plus générale des méthodes d'inférence statistique fondée sur des critères d'optimalité.

Références

- (1). Bayarri, M. J., Berger, J. O., Forte, A., & García-Donato, G. (2022). Bayesian approach for confidence intervals of variance on the normal distribution. *Journal of Mathematics*, 2022, Article 8043260. <https://doi.org/10.1155/2022/8043260>
- (2). Casella, G., & Berger, R. L. (2002). *Statistical inference* (2nd ed.). Duxbury.
- (3). Chiou, H.-J., Chen, Y.-T., & Lin, C.-H. (2025). Confidence intervals based on the modified chi-squared distribution. *arXiv*. <https://arxiv.org/abs/2511.06476>
- (4). CRESE. (2024). *Re-examining confidence intervals for ratios of parameters* (Working Paper No. WP-2024-20). Université de Franche-Comté.
- (5). Dahiya, R. C., & Guttman, I. (1982). Shortest confidence intervals for the variance of a normal distribution. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 11(12), 1347–1355.
- (6). Ferentinos, K. K. (1987). On shortest confidence intervals. *Statistics & Probability Letters*, 5(4), 285–288.
- (7). Ferentinos, K. K. (1990). Further results on shortest confidence intervals. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 19(2), 649–660.
- (8). Ferentinos, K. K., & Kourouklis, S. (1990). Confidence intervals for variance. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 26(1), 85–92.
- (9). Guenther, W. C. (1969). Shortest confidence intervals. *The American Statistician*, 23(1), 22–25. <https://doi.org/10.1080/00031305.1969.10481817>

- (10). Guenther, W. C. (1971). Shortest confidence intervals for the variance of a normal distribution. *The American Statistician*, 25(3), 25–27.
- (11). Guenther, W. C. (1987). Confidence intervals for the variance of a normal distribution. *The American Statistician*, 41(3), 203–204.
- (12). Huzurbazar, V. S. (1955). Probability distributions and statistical inference. *Proceedings of the National Institute of Sciences of India*.
- (13). Juola, R. C. (1993). More on shortest confidence intervals. *The American Statistician*, 47(2), 117–119.
- (14). Kabaila, P. (2011). Admissibility of the usual confidence interval for the normal mean. *Statistics & Probability Letters*, 81(3), 352–359.
- (15). Kirmani, S. N. U. A. (1990). On shortest confidence intervals. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 26(1), 93–100.
- (16). Mainzer, R., & Kabaila, P. (2019). ciuupi: An R package for computing confidence intervals that utilize uncertain prior information. *The R Journal*, 11(1), 362–376.
- (17). Nocedal, J., & Wright, S. J. (2006). *Numerical optimization* (2nd ed.). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-40065-5>
- (18). Panichkitkosolkul, W. (2013). Confidence intervals for coefficient of variation. *Journal of Probability and Statistics*, 2013, Article 278549.
- (19). Petropoulos, C., & Kourouklis, S. (2012). Improved confidence intervals for the variance of a normal distribution. *Metrika*, 75(4), 491–506.
- (20). R Core Team. (2024). *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing. <https://www.r-project.org>
- (21). Rohatgi, V. K., & Saleh, A. K. M. E. (2001). *An introduction to probability and statistics* (2nd ed.). Wiley.
- (22). Tate, R. F., & Klett, G. W. (1959). Optimal confidence intervals for the variance of a normal distribution. *Journal of the American Statistical Association*, 54(287), 674–682. <https://doi.org/10.1080/01621459.1959.10501528>
- (23). Thangjai, W., Niwitpong, S.-A., & Niwitpong, S. (2020). Confidence intervals for variance and difference of variances of distributions. *Symmetry*, 12(10), 1642. <https://doi.org/10.3390/sym12101642>
- (24). Traoré, B., Diabaté, L., Touré, B., & Fané, A. (2018). The shortest confidence interval for the mean of a normal distribution. *International Journal of Statistics and Probability*, 7(6), 21–28.
- (25). Turner, D. W. (1978). Improved confidence intervals for the variance and standard deviation of a normal population. *Journal of the American Statistical Association*.
- (26). Zhang, B., O'Brien, S. M., Wu, Y., & Thomas, L. E. (2025). Improving variance and confidence interval estimation in small-sample analyses: Bootstrap vs. asymptotic methods. *arXiv*. <https://arxiv.org/abs/2511.10911>